

跳变马尔可夫系统的最大混合相关熵状态估计

沈 忱^{1,2}, MIHAYLOVA Lyudmila²

(1. 浙江工商大学信息与电子工程学院(萨塞克斯人工智能学院), 浙江杭州 310018;

2. 谢菲尔德大学自动控制与系统工程系, 谢菲尔德 S10 2TN)

摘要: 依托于多模型框架的跳变马尔可夫系统状态估计的性能通常受限于多模型间的信息融合程度. 本文以交互式多模型方法为框架, 针对跳变马尔可夫系统提出了一种基于最大混合相关熵的状态估计方法. 为了能有效处理模型高阶信息, 在混合和融合步骤引入最大混合相关熵测度替代常规的二阶统计矩准则, 设计了关于系统状态的代价函数, 通过最优化该函数得到状态估计的迭代解. 仿真实验详尽展示了所提方法的主要特征, 并表明其在高斯和非高斯噪声环境下都具有较好的估计效果.

关键词: 混合相关熵; 状态估计; 模型不确定

中图分类号: TP212.6

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2021)11-2225-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20201128

Maximum Mixture Correntropy State Estimation for Jump Markov Systems

SHEN Chen^{1,2}, MIHAYLOVA Lyudmila²

(1. School of Information and Electronic Engineering (Sussex Artificial Intelligence Institute), Zhejiang Gongshang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China;

2. Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, Sheffield S10 2TN, UK)

Abstract: State estimation for jump Markov systems based on multiple models is usually influenced by the quality of model fusion. In this article, we propose a novel state estimation approach for the jump Markov systems based on the maximum mixture correntropy criterion (MMCC). The proposed approach is implemented within the framework of the interacting multiple models. To capture high order information from multiple models, we utilize the MMCC instead of second-order statistical measures at the mixing and fusion stages, respectively. Two cost functions with respect to the system state at different stages are designed and optimized to yield the resultant iterative solutions. Extensive simulated results present the feature of the proposed MMCC based approach, and prove its efficacy for both Gaussian and non-Gaussian cases.

Key words: mixture correntropy; state estimation; model uncertainty

1 引言

近几十年来, 基于随机状态空间模型的滤波状态估计问题一直是学界和工程界一个热门的研究课题, 它在导航、姿态估计、交通控制、定位及计量金融等诸多领域^[1-6]拥有着广泛而深入的应用, 迄今为止已呈现出很多理论及应用成果. 尽管如此, 从一定程度和特定场景分析, 随机状态空间模型本质上仍无法很好地应对实际应用中可能存在的模型不确定问题.

模型不确定通常指代由于先验知识缺乏或实际工作系统存在摄动而无法准确设置或动态调整相应的模

型参数, 这类问题在实际应用中广泛存在, 它会对系统的状态估计性能产生较大的负面影响. 相对于随机状态空间模型, 跳变马尔可夫系统^[7-9]因能较好处理模型不确定问题, 受到相关领域越来越多研究者的青睐. 由于跳变马尔可夫系统存在系统模态的跳变, 因此它的最优全假设求解数量会随时间指数增长, 最终导致计算量过大而无法应用于实际场合. 许多次优化的解决方案由此被陆续提出, 主流的次优化解决方法有自主多模型^[10]、广义伪贝叶斯^[11]、交互式多模型^[12]以及依托采样机理的滤波器^[13,14]等. 特别地, 交互式多模型由

于在计算开销和估计精度上拥有较好的折中, 相比其他多模型方法较为优越^[15], 受到了更多研究者的关注和使用. 但大部分基于交互式多模型框架的状态估计方法的一个固有缺陷是在涉及基于高斯分布假设的模型混合和融合过程中, 为了得到简化求解, 只保留用以刻画高斯分布特征的均值和协方差阵, 忽略并丢弃了可能存在的高阶模型信息, 这在一定程度上会降低状态估计的精度, 并随着高斯假设准确性及合理性的削弱而进一步降低. 与此同时, 目前相当数量依托交互式多模型框架的状态估计方法, 主要从最小化信息增益、弱化模型竞争、模型权值调整、模型转移概率优化和模型变结构等指标入手对交互式多模型方法进行改进及拓展^[16-21], 以提升跳变马尔可夫系统的状态估计性能, 但在处理多模型信息时大都采用基于二阶统计矩的方法, 缺乏对模型高阶信息的妥善利用和处理.

最近, 一种名为相关熵的源于信息理论的测度由于其在信息理论学习^[22,23]和自适应滤波领域^[24-26]对于非高斯数据学习体现出较好的鲁棒性而受到相关研究者的注意, 并将该概念引入到了随机状态空间模型的线性和非线性滤波估计问题中^[27-30]. 其中, 文献^[27]创新性地提出用最大相关熵测度替代传统的最小均方根误差准则, 并以此作为优化目标函数推导并设计了最大相关熵卡尔曼滤波器, 它为后续基于相关熵测度概念的在线滤波估计方法奠定了基本框架. 除此之外, 基于相关熵测度的滤波器也已成功应用于 INS/GPS 组合导航^[31]和姿态确定^[32]等实时应用领域. 以上所述基于相关熵测度的滤波器都被证明在受非高斯噪声影响的状态估计中具有良好的鲁棒性, 这些成果为本文研究涉及模型不确定问题的多模型状态估计提供了一个可能的解决思路.

本文研究工作的贡献主要在于以下两方面. 一、与现有利用最大相关熵建立滤波估计体系的优化准则不同, 本文创新性地相关熵测度的概念引入到了多模型估计的框架之中. 区别于其他方法^[33,34]将 H_∞ 滤波、学生 t 分布假设滤波等鲁棒化滤波方法直接嵌入到多模型框架体系中模型条件滤波这一步骤, 本文基于相关熵设计了一种形式上类似于最新提出的混合相关熵概念^[35]的测度, 并将其作为多模型间混合(交互)和融合的优化准则进行信息融合求解. 这与现有状态估计领域中的相关熵滤波方法对于相关熵概念的使用是有本质区别的. 二、本研究工作克服了先前提到的交互式多模型缺失高阶模型信息而导致估计精度下降的缺陷, 从而提高了跳变马尔可夫系统在高斯和非高斯噪声下的状态估计性能. 研究还同时发现, 文献^[16]中的成果是本文所提方法在一个参数极限情形下的特例.

2 模型描述

本文所考虑的一个线性跳变马尔可夫系统表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k^{s_k} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}^{s_k} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k^{s_k} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^{s_k} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, 状态 \mathbf{x}_k 代表系统状态变量, \mathbf{z}_k 为量测量, 零均值的过程噪声 \mathbf{w}_{k-1} 和观测噪声 \mathbf{v}_k 分别具有已知的协方差矩阵 \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_k , 系统状态转移矩阵由 \mathbf{F}_k 表示, \mathbf{H}_k 代表观测矩阵. 上标 s_k 作为一个指示变量代表了系统模态, 也被称作离散系统状态. 若假设跳变马尔可夫系统模型集具有 M 个模型, 则 s_k 的序列是一条具有 M 个离散状态的齐次马尔可夫链. $s_k = j (j \in \{1, 2, \dots, M\})$ 代表 k 时刻系统匹配的是第 j 个模型(简称模型 j), 模型间转移概率由转移概率矩阵 $\mathbf{\Pi} = \{\pi_{ij}\}_{M \times M}$ 确定, 其中每个元素 π_{ij} 代表由模型 i 切换到模型 j 的转移概率 $\Pr(s_k = j | s_{k-1} = i)$, 它对任意 $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ 满足有 $\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = 1$.

3 相关熵

相关熵作为一种信息理论领域的测度, 表征了两个随机变量之间的广义相似性. 具体地说, 给定两个随机变量 $X, Y \in \mathbb{R}$ 和它们的联合分布 $F(X, Y)$, 则相关熵定义为

$$V(X, Y) = E[K(X, Y)] = \int K(x, y) dF_{XY}(x, y) \quad (2)$$

其中 $K(X, Y)$ 为移不变 Mercer 核, 通常由一个高斯分布描述^[23]

$$K(x, y) = G_\sigma(e) = \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

其中, σ 代表高斯核带宽, 误差 e 表示为 $e = x - y$. 尽管相关熵在式(2)中可以看作是核函数在联合分布 $F_{XY}(x, y)$ 上的期望, 但是由于分布 $F_{XY}(x, y)$ 通常是未知的, 因此很难直接进行计算. 一个比较切合实际的方案是从 $F_{XY}(x, y)$ 中采样若干数据 $e(i)$ 进行近似计算^[27].

$$\widehat{V}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_\sigma(e(i)) \quad (4)$$

其中, N 为样本数量. 可以看出, 当 $x(i) = y(i)$ 时, $\widehat{V}(X, Y)$ 取到最大值. 因此, 最大相关熵的概念就是要通过寻找式(4)的最大值使随机变量 $x(i)$ 和 $y(i)$ 之间的差异足够小. 进一步, 若对核函数 $G_\sigma(e(i))$ 进行泰勒展开, 相关熵又可以书写成以下表达式:

$$V(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} n!} E[(X - Y)^{2n}] \quad (5)$$

从上式可以看出, 相关熵可被看作是随机变量 $X - Y$ 的所有偶数阶矩的加权求和, 因此它必然包含了更高

阶矩信息,并且可以由核带宽参数 σ 调整. 所以,相关熵非常适合描述利用常规二阶矩信息所无法完整或充分描述的数据.

在相关熵定义的基础上,文献[35]又提出了一个混合相关熵的概念,它在相应文献中的具体数学描述如下

$$M(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho G_{\sigma_1}(e(i)) + (1 - \rho) G_{\sigma_2}(e(i))) \quad (6)$$

其中 ρ 是混合因子,可以看出,混合相关熵包含了两个核带宽参数 $\sigma_1 \leq \sigma_2$. 需要指出的是,文献[35]提出混合相关熵概念的初衷是为了使监督学习的鲁棒性可以根据数据集中不同的野值发生概率作动态调整. 而与之相区别,本文的目标则是希望对具有不同模型概率的多模型进行融合,属于不同的研究问题. 在下一节即将看到,本文所建立的基于相关熵概念的代价函数在形式结构上类似于式(6),这也正是本文将所提方法命名为“混合相关熵”的原因.

4 最大混合相关熵状态估计

本文所提的最大混合相关熵状态估计以交互式多模型为框架展开,主要分为四个步骤.

步骤1 最大混合相关熵混合

假设在 $k - 1$ 离散时刻的跳变马尔可夫系统模态满足 $s_{k-1} = i$,即选取了模型 i ,给定其模型概率记为 μ_{k-1}^i ,首先计算预测的混合概率 μ_{k-1}^{ij} 如下

$$\mu_{k-1}^{ij} = \frac{\pi_{ij} \mu_{k-1}^i}{\sum_{i=1}^M \pi_{ij} \mu_{k-1}^i} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j} = \left(\sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} G_{\sigma} \left(\left\| \mathbf{x}_{k-1|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \right\|_{(P_{k-1|k-1}^i)^{-1}} \right) (P_{k-1|k-1}^i)^{-1} \right)^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} G_{\sigma} \left(\left\| \mathbf{x}_{k-1|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \right\|_{(P_{k-1|k-1}^i)^{-1}} \right) (P_{k-1|k-1}^i)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \quad (9)$$

可以看出,因为等式右边存在有 $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$,上式没有闭合形式的解,此时需要引入固定点迭代的技巧来求

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j,t+1} = \left(\sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} G_{\sigma} \left(\left\| \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j,t} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \right\|_{(P_{k-1|k-1}^i)^{-1}} \right) (P_{k-1|k-1}^i)^{-1} \right)^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} G_{\sigma} \left(\left\| \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j,t} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \right\|_{(P_{k-1|k-1}^i)^{-1}} \right) (P_{k-1|k-1}^i)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \quad (10)$$

注意到上述最大混合相关熵准则下的通解仅仅给出了混合状态的表达式,在交互式多模型框架下由于各个步骤间数据传递的需要,混合协方差矩阵仍然不可或缺. 现有基于相关熵概念设计的所有滤波器中,协方差矩阵的递推表达式都是效仿卡尔曼滤波器的协方差矩阵更新形式得到的,而非通过严格的理论计算,因此针对本文考虑的跳变马尔可夫系统,上述方法并不

通过上式计算得到的 μ_{k-1}^{ij} 作为后续进行输入交互的混合因子. 该步骤的主要任务是寻找一个混合状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j}$ 作为后续滤波器的初始化输入,使之包含来自于 M 个模型的信息. 既然设立最大相关熵准则的目的是寻找式(4)的最大值,本步骤借鉴这一思想,设定的目标自然是寻找一个混合状态估计使之满足 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j} = \arg \max J_1(\mathbf{x}_{k-1|k-1})$,其中代价函数 $J_1(\mathbf{x}_{k-1|k-1})$ 在我们的问题中可以通过引入 L2 范数 $\| \cdot \|^{[30]}$ 、 M 个核分布之和以及混合概率 μ_{k-1}^{ij} 进行联合定义如下

$$J_1(\mathbf{x}_{k-1|k-1}) = \sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} G_{\sigma} \left(\left\| \mathbf{x}_{k-1|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i \right\|_{(P_{k-1|k-1}^i)^{-1}} \right) \quad (8)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i$ 和 $P_{k-1|k-1}^i$ 分别为 $k - 1$ 时刻已知的对应第 i 个模型的状态和协方差矩阵,矩阵加权的范数在此作为相关熵核函数的输入参数.

正如先前所指出,式(8)由于具有 M 个成分之和,在形式上类似于具有 2 个成分的混合函数式(6),所以在此处需要作进一步明确区分. 在原始定义中^[35],核函数的混合因子 ρ 和 $1 - \rho$ 代表了选用不同核带宽值所发生的概率,并且是算法执行过程中认为是固定不变的. 在我们的问题中,混合概率 μ_{k-1}^{ij} 起到了类似于 ρ 加权核函数的作用,但区别在于我们定义的核函数是关于模型融合误差的,且混合概率 μ_{k-1}^{ij} 是会循环更新和估计的. 此外,利用式(8)中的 L2 范数形式取代式(4)中的求和形式,降低了计算误差矩阵中因对每个元素计算指数函数而引发的计算负担^[30].

对式(8)求偏导并置零可以求得状态 $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$ 的解,即为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j}$.

解,该技巧在相关熵相关文献中已广泛采用. 让 t 表示数据来源于第 t 次迭代,则式(9)可重新写为

能直接运用. 为此,我们借助于 Kullback-Leibler(KL) 难度融合策略^[16,36]进行协方差矩阵的多模型融合. 于是,混合的协方差矩阵可以按下式计算.

$$P_{k-1|k-1}^{0j} = \left(\sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} (P_{k-1|k-1}^i)^{-1} \right)^{-1} \quad (11)$$

步骤2 模型条件卡尔曼滤波

一旦混合状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j}$ 和混合协方差矩阵 $P_{k-1|k-1}^{0j}$

确定了,就可以利用标准的卡尔曼滤波器执行该步骤包含的预测和更新过程,具体如下

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^j = \mathbf{F}_k^j \hat{\mathbf{x}}_{k-1lk-1}^{0j} \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{klk-1}^j = \mathbf{F}_k^j \mathbf{P}_{k-1lk-1}^{0j} (\mathbf{F}_k^j)^T + \mathbf{Q}_{k-1}^j \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_k^j = \mathbf{P}_{klk-1}^j (\mathbf{H}_k^j)^T (\mathbf{H}_k^j \mathbf{P}_{klk-1}^j (\mathbf{H}_k^j)^T + \mathbf{R}_k^j)^{-1} \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk}^j = \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^j + \mathbf{K}_k^j (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k^j \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^j) \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{klk}^j = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^j \mathbf{H}_k^j) \mathbf{P}_{klk-1}^j \quad (16)$$

步骤3 模型概率更新

模型 j 的概率利用贝叶斯公式进行后验更新.

$$\mu_k^j = L_k^j \frac{\sum_{l=1}^M \pi_{lj} \mu_{k-1}^l}{\sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^M \pi_{li} \mu_{k-1}^l L_k^i} \quad (17)$$

其中似然函数 L_k^j 服从高斯分布 $N(\cdot)$ 并满足

$$L_k^j = N(\mathbf{z}_k | \mathbf{H}_k^j \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}^j, \mathbf{H}_k^j \mathbf{P}_{klk-1}^j (\mathbf{H}_k^j)^T + \mathbf{R}_k^j) \quad (18)$$

步骤4 最大混合相关熵融合

为了融合模型条件滤波器的输出结果,再次利用最大混合相关熵准则.要得到最终的融合状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{klk}$,就是需要寻找 $\hat{\mathbf{x}}_{klk} = \arg \max \mathbf{J}_2(\mathbf{x}_{klk})$,其中代价函数 $\mathbf{J}_2(\mathbf{x}_{klk})$ 可以效仿式(8)进行选取.

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{x}_{klk}) = \sum_{j=1}^M \mu_k^j G_\sigma \left(\left\| \mathbf{x}_{klk} - \hat{\mathbf{x}}_{klk}^j \right\|_{(\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1}} \right) \quad (19)$$

与混合步骤的求解 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1lk-1}^{0j}$ 过程类似,通过计算式(19)的一阶导数可得最大混合相关熵准则下的迭代解 $\hat{\mathbf{x}}_{klk}$ 如下

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk}^{t+1} = \left(\sum_{j=1}^M \mu_k^j G_\sigma \left(\left\| \hat{\mathbf{x}}_{klk}^t - \hat{\mathbf{x}}_{klk}^j \right\|_{(\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1}} \right) (\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1} \right)^{-1} \times \sum_{j=1}^M \mu_k^j G_\sigma \left(\left\| \hat{\mathbf{x}}_{klk}^t - \hat{\mathbf{x}}_{klk}^j \right\|_{(\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1}} \right) (\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{klk}^j \quad (20)$$

同理,为了使协方差阵信息在算法内有效传递,协方差矩阵 \mathbf{P}_{klk} 可以再次由基于KL散度的信息融合策略得到

$$\mathbf{P}_{klk} = \left(\sum_{j=1}^M \mu_k^j (\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1} \right)^{-1} \quad (21)$$

5 算法讨论与总结

5.1 讨论

事实上,本文所提基于混合相关熵的交互式多模型方法是文献[16]中基于KL散度的交互式多模型方法(KLIMM)的一种广义拓展.简单证明如下

针对式(10)中的迭代解,如果核带宽 $\sigma \rightarrow \infty$,则有

$G_\sigma \left(\left\| \mathbf{x}_{k-1lk-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1lk-1}^i \right\|_{(\mathbf{P}_{k-1lk-1}^i)^{-1}} \right) = 1$. 将其代入式(10)

可以得到

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1lk-1}^{0j} = \left(\sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} (\mathbf{P}_{k-1lk-1}^i)^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} (\mathbf{P}_{k-1lk-1}^i)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1lk-1}^i \quad (22)$$

$$= \mathbf{P}_{k-1lk-1}^{0j} \sum_{i=1}^M \mu_{k-1}^{ij} (\mathbf{P}_{k-1lk-1}^i)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1lk-1}^i$$

类似地,将 $G_\sigma \left(\left\| \hat{\mathbf{x}}_{klk}^i - \hat{\mathbf{x}}_{klk}^j \right\|_{(\mathbf{P}_{klk}^i)^{-1}} \right) = 1$ 代入到式(20)

也可得到

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk} = \mathbf{P}_{klk} \sum_{j=1}^M \mu_k^j (\mathbf{P}_{klk}^j)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{klk}^j \quad (23)$$

因此,若分别将式(10)和式(20)用式(22)和式(23)替代,则本文方法在 $\sigma \rightarrow \infty$ 这一极限情形下就退化成了文献[16]中的KLIMM.考虑到以上结论和KLIMM的关系,当系统状态或观测量为高维数变量时,本文所提方法也可以拓展至文献[16]中具有信息形式的交互式多模型方法中.定义信息状态向量 \mathbf{y}_k 和信息矩阵 \mathbf{Y}_k ,使它们满足

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k &= \mathbf{P}_k^{-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (24)$$

则信息形式的式(20)可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{klk}^{t+1} &= \mathbf{Y}_{klk} \left(\sum_{j=1}^M \mu_k^j G_\sigma \left(\left\| \mathbf{Y}_{klk}^{-1} \mathbf{y}_{klk}^t - (\mathbf{Y}_{klk}^j)^{-1} \mathbf{y}_{klk}^j \right\|_{\mathbf{Y}_{klk}^j} \right) \mathbf{Y}_{klk}^j \right)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^M \mu_k^j G_\sigma \left(\left\| \mathbf{Y}_{klk}^{-1} \mathbf{y}_{klk}^t - (\mathbf{Y}_{klk}^j)^{-1} \mathbf{y}_{klk}^j \right\|_{\mathbf{Y}_{klk}^j} \right) \mathbf{y}_{klk}^j \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{Y}_{klk} = \sum_{j=1}^M \mu_k^j \mathbf{Y}_{klk}^j \quad (26)$$

在式(25)中令 $\sigma \rightarrow \infty$ 并联合式(26),可以得到

$$\mathbf{y}_{klk} = \mathbf{Y}_{klk} \left(\sum_{j=1}^M \mu_k^j \mathbf{Y}_{klk}^j \right)^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_k^j \mathbf{y}_{klk}^j = \sum_{j=1}^M \mu_k^j \mathbf{y}_{klk}^j \quad (27)$$

上式和文献[16]中KLIMM在每一时刻最后得到的信息状态矢量的表达式完全一致.

5.2 总结

本文所提的最大混合相关熵状态估计的核心步骤总结于算法1中.由于算法是在交互式多模型的框架下进行推导的,因此很容易发现该算法和传统交互式多模型算法在表达形式上是十分相似的,主要区别在于混合相关熵-混合以及混合相关熵-融合这两个步骤.在这两个步骤中设计的代价函数是分别关于 $\mathbf{x}_{k-1lk-1}$ 和 \mathbf{x}_{klk} 的,于是很自然得到了混合的状态估计

$\hat{x}_{k-1|k-1}^{0j}$ 和最终的状态估计 $\hat{x}_{k|k}$. 尽管式(10)和式(20)中固定点迭代形式的引入和矩阵求逆运算带来了一定的计算量,但是我们后续会看到,本文算法会以一个相对合理的代价显著降低交互式多模型估计体系的估计误差.

另外还需要注意的是,在式(11)和式(21)中,两个协方差矩阵 $P_{k-1|k-1}^{0j}$ 和 $P_{k|k}$ 是利用基于KL散度的融合策略得到的,并非像式(10)和式(20)那样利用最大混合相关熵准则得到状态估计解. 之所以这么做的原因在于:1. 基于混合相关熵概念设计的代价函数只能得到系统状态的解. 2. 我们已经通过融入相关熵的概念并设计合理的代价函数将高阶信息包含于了式(10)和式(20)之中. 所以式(11)和式(21)的目的仅仅是为了传递状态的二阶信息,因为它既是模型条件滤波器的输入条件,又是交互式多模型最终协方差矩阵的输出要素. 3. 上一部分的5.1发现,本文方法是文献[16]所提KLIMM在引入核带宽参数后的广义扩展,而核带宽参数的变化仅影响式(10)和式(20)的结果,并不对式(11)和式(21)产生影响,因此可以使用基于KL散度的融合策略对协方差阵进行融合,其有效性及合理性可参考文献[16]等.

文献[27~29]等基于相关熵设计的滤波算法都引入了一个阈值,在算法执行时判定固定点迭代是否继续进行,从而在适当的时候终止迭代计算. 与此同时,文献[27,28,30,31]都指出了几次小数目的迭代步骤就已经可以产生足够满意的估计精度. 考虑到本文所提方法已经引入了多次矩阵逆运算,在如下算法1中的2.1和5.1这两个迭代计算步骤里,我们将不采用阈值检测法而是通过经验选取迭代步数,后续实验中将测试不同迭代步数对算法相关性能的影响.

算法1 最大混合相关熵状态估计算法

输入: $\sigma, \pi_{ij}, F_k^i, Q_{k-1}^i, H_k^i, R_k^i (i, j = 1, 2, \dots, M)$

输出: $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$

步骤:

初始化 $x_{0|0}^i, P_{0|0}^i, \mu_0^i = 1/M$

for $k = 1, 2, \dots, K$

1. 利用式(7)计算混合概率 μ_{k-1}^{0j}
2. 1 给定最大混合相关熵准则的最大迭代次数 t_{max} ,
 利用式(10)迭代计算求解 $\hat{x}_{k-1|k-1}^{0j}$
2. 2 利用式(11)计算混合协方差矩阵 $P_{k-1|k-1}^{0j}$
3. 执行条件卡尔曼滤波器式(12)~式(16)得到 $\hat{x}_{k|k}^i$ 和 $P_{k|k}^i$
4. 利用式(17)和式(18)更新模型概率
5. 1 给定最大混合相关熵准则的最大迭代次数 t_{max} ,
 利用式(20)迭代计算求解 $\hat{x}_{k|k}$
5. 2 利用式(21)计算混合协方差矩阵 $P_{k|k}$

6 仿真实验

仿真实验模拟了一个二维平面的机动目标跟踪实例,仿真时间为100s,并进行了1000次蒙特卡罗重复实验. 目标真实运动模型设定为匀速模型和协同转弯模型^[37,38]的组合. 状态转移矩阵、过程噪声协方差阵、观测矩阵和观测噪声协方差阵分别设定如下

$$F_k^1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_1 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F_k^{2,3} = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & -\Gamma_3 \\ \Gamma_3 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \\ 0 & \cos(\omega T) \end{bmatrix}, \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos(\omega T) - 1}{\omega} \\ 0 & -\sin(\omega T) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$Q_{k-1} = q^{1,2,3} \Delta I_{2 \times 2}, \Delta = \begin{bmatrix} T^2 & \\ & T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T^2 & \\ & T \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$R_k = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中 $T = 1s$ 为采样时间, ω 为角速度.

在本实验中,目标初始位置为(100m, 50m),初始速度沿X轴和Y轴均设为5m/s. 在前20s,目标按照匀速模型匀速运动,且 $q^1 = 9$. 在第21s,目标动力学模型切换成协同转弯模型开始机动转弯,角速率为 $\omega = -4^\circ/s$,且 $q^2 = 4$. 该运动模式持续20s. 在41s时刻,目标机动转弯的角速率切换至 $\omega = +4^\circ/s$,且 $q^3 = 4$,此状态持续至60s时刻. 从61s开始,模型又切换回21s~40s期间的状态. 最后20s,目标再次按照匀速模型进行运动. 三个运动模型的初始化模型概率值均设为1/3.

实验分为两个场景. 第一个场景考虑过程噪声和观测噪声都服从常规的高斯分布的情形. 本文所提方法MMCIMM主要和利用矩匹配法进行多模型融合的MMIMM和利用KL散度进行多模型融合的KLIMM作对比. 除了以上所提到的模型参数,所有算法的转移概率矩阵中的元素都设置为 $\pi_{ij} = 0.8(i = j)$ 且 $\pi_{ij} = 0.2(i \neq j)$. 特别地,本文算法中的迭代次数设为2,核带宽赋值为5.

图1和图2分别展示了目标的位置和速度的均方根误差(Root Mean Squared Error, RMSE). 可以看出,MMCIMM比MMIMM和KLIMM具有更小的位置和速度估计误差. 这是因为,虽然干扰系统和观测过程的过程噪声和观测噪声是高斯噪声,每个子模型系统状态的概率分布也都服从高斯分布,但在基于传统交互式多模型框架的算法中,如MMIMM和KLIMM,混合的系统状态概率分布本质上却是一个非高斯分布(即使其各个成分都服从高斯分布),矩匹配法等二阶统计方法最高只能捕捉到二阶信息并忽略其他高阶信息.

进一步,我们关注固定点迭代次数对MMCIMM性

能方面的影响,实验中,迭代次数由1依次取到10进行测试.观察图3可以发现,MMCIMM在100s内的位置和速度平均均方估计误差(Average Root Mean Squared Error, ARMSE)分别在5次和2次迭代之后就变得非常稳定,该结果与文献[27,28,30,31]中验证的迭代特性较为吻合,即不需要太多迭代次数就可以很快得到较满意的估计精度,但是以上文献是利用相关熵进行最优化估计准则设计,而我们则是利用混合相关熵设计了模型融合准则.在本实验的示例中,MMCIMM在取迭代次数为4和8~10时,分别具有最小的位置和速度估计误差.但是,不容忽视的是当迭代次数选取较高值时势必会增加算法的计算负担,为此,我们将MMCIMM单次蒙特卡罗仿真的计算开销和迭代次数的关系绘制于图4中,并同时在图4中和MMIMM及KLIMM的计算开销相比较.从上述两图可以很明显注意到MMIMM具有最小的计算开销,其次是KLIMM,这是由于KLIMM算法也涉及了部分矩阵求逆运算,它们在一定程度上增加了计算量.迭代次数设置为2和3的MMCIMM的计算量大致分别是MMIMM和KLIMM的两倍多,如式(10)与式(20)所示,其中增长的计算量主要来源于迭代次数以及多次的矩阵逆运算.尽管MMCIMM相比MMIMM和KLIMM具有较高的计算量,但是即使迭代次数仅为2,它在估计误差的性能上也显著地优于二者(如图1,图2).这一系列实验同时说明了有时赋予MMCIMM较大的迭代数也并非十分必要,因为它会引起高计算负荷,而且未必会带来显著的估计性能方面的改善.

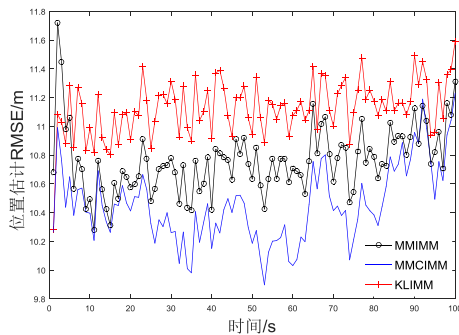


图1 位置估计RMSE(高斯噪声情形)

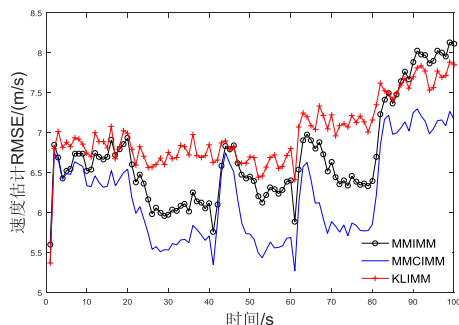


图2 速度估计RMSE(高斯噪声情形)

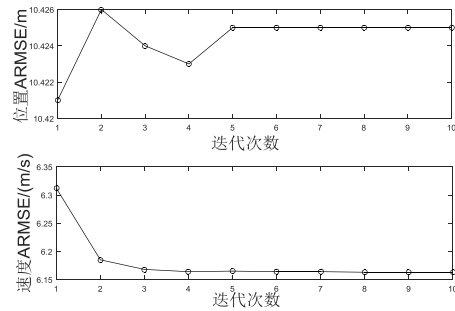


图3 迭代次数对估计误差的影响

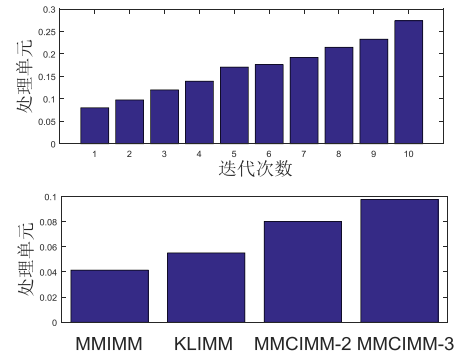


图4 计算开销对比

第二个实验场景主要考察在观测噪声受到5%野值干扰情形下的算法性能,假设野值服从高斯分布 $p(\text{outlier}) = N(0, 80R_k)$. 根据先前实验的结论,为节约计算资源,MMCIMM的迭代次数设置为2.

图5给出了单次蒙特卡罗仿真中MMIMM、KLIMM和核带宽参数取为 $\sigma = 10$ 的MMCIMM的目标位置估计轨迹,以及目标的真实运动轨迹和服从非高斯分布的量测点.从图5中可以观察到,一些明显非常规的量测点时有出现并远离目标真实运动轨迹和其他服从高斯分布的量测点.相比MMCIMM,MMIMM和KLIMM对这些野值观测点非常敏感,体现出较大的位置估计误差.这主要是因为高阶信息在MMIMM和KLIMM的体系中被忽略了,而在非高斯情形下,这种信息的忽略会比在先前高斯噪声的情景下带来更大的估计误差.

图6和图7分别给出了在非高斯噪声干扰下1000次蒙特卡罗仿真的位置和速度估计RMSE.作为对图5展示的轨迹的补充,MMCIMM在本次实验中使用了三个不同的核带宽值.相比高斯噪声的实验,由于野值的存在使实际噪声体现为非高斯,所有算法的估计误差都明显增大,尤其是基于二阶统计矩的方法,在多模型交互过程中丢弃了很多有用信息.于是在图6和图7中可以看到MMCIMM和MMIMM/KLIMM的估计误差曲线之间的差距显著增加(相比图1和图2),无论核带宽取值如何,MMCIMM都具有最可靠的估计结果.经离

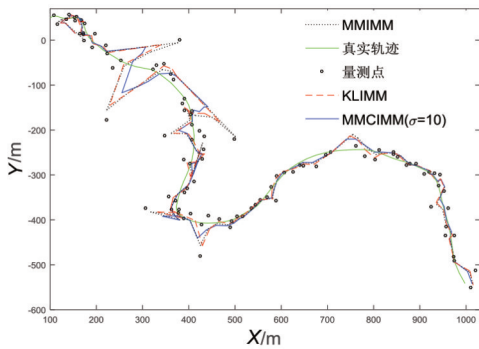


图5 目标运动和跟踪轨迹图

线数据处理,MMCIMM 最小的位置和速度 ARMSE 分别为 27.933m ($\sigma = 5$) 和 10.370m/s ($\sigma = 10$), 远优于 MMIMM (41.643m, 12.733m/s) 和 KLIMM (33.226m, 16.990m/s). 本文所提方法一个较有前景的特征在于 MMCIMM 并没有融入其他鲁棒化滤波估计技巧,在步骤 2 中仅仅使用了最简单的卡尔曼滤波器,这意味着本方法可为解决其他场景的问题提供了一个鲁棒化的框架,且鲁棒性能还有继续改进和优化的空间.

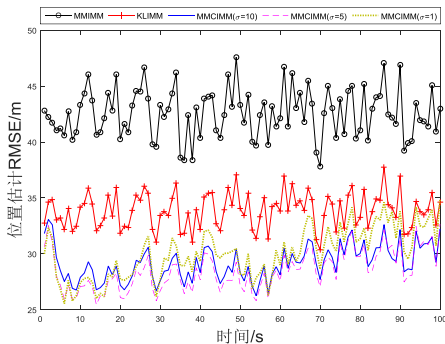


图6 位置估计 RMSE(非高斯噪声情形)

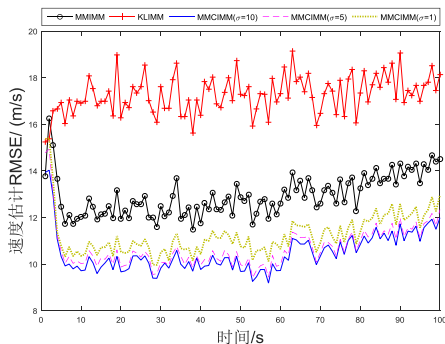


图7 速度估计 RMSE(非高斯噪声情形)

注意到图 6 和图 7 中 MMCIMM ($\sigma = 5$) 具有最小的位置估计误差而 MMCIMM ($\sigma = 10$) 具有最小的速度估计误差,回顾文献[27]曾指出,核带宽值的选取应该根据具体实验和场景手动选择和优化,于是我们最后对核带宽参数进行了测试,考察其对 MMCIMM 估计结果

的影响,并从中探求是否能根据本实验设置寻找到最合适的核带宽值. 图 8 曲线给出了不同核带宽值对 MMCIMM 估计结果的影响. 图中结果表明,核带宽值在 4~5 之间具有最小的位置估计误差,而速度估计误差则随核带宽值的增加而单调递减,在取值为 10 时具有最小估计误差. 由上可以得出结论,如果需要同时拥有良好的位置和速度估计误差,应避免选取较小的核带宽值.

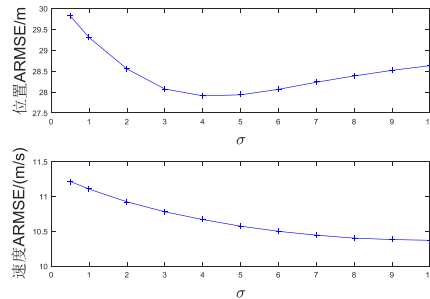


图8 核带宽参数对估计结果的影响

7 结论

本文针对跳变马尔可夫系统状态估计问题提出了最大混合相关熵交互式多模型状态估计方法,该方法主要特征是分别在混合和融合步骤设计了基于混合相关熵准则的代价函数,并通过最大化该函数得到迭代形式的状态估计解,同时给出了所提方法的信息表达式. 仿真实验结果表明,该方法对于线性跳变马尔可夫系统,尤其是在非高斯噪声干扰场景下的状态估计性能具有显著的提升. 本方法后续可方便地移植到非线性跳变马尔可夫系统的状态估计问题中.

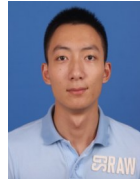
参考文献

- [1] Wang D J, Lv H F, Wu J. Augmented cubature Kalman filter for nonlinear RTK/MIMU integrated navigation with non-additive noise[J]. Measurement, 2017, 97: 111 – 125.
- [2] Huang Y L, Zhang Y G. A new process uncertainty robust student's t based Kalman filter for SINS/GPS integration [J]. IEEE Access, 2017, 5: 14391 – 14404.
- [3] Huang W, Xie H S, Shen C, et al. A robust strong tracking cubature Kalman filter for spacecraft attitude estimation with quaternion constraint [J]. Acta Astronautica, 2016, 121: 153 – 163.
- [4] Nurminen H, Ardeshiri T, Piche R, et al. Robust inference for state-space models with skewed measurement noise[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(11): 1898 – 1902.
- [5] Hawes M, Amer H M, Mihaylova L. Traffic state estimation via a particle filter over a reduced measurement space

- [A]. 20th International Conference on Information Fusion [C]. Xi'an, China: IEEE, 2017. 1 – 8.
- [6] Cowpertwait P S P, Metcalfe A V. *Introductory Time Series with R*[M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2009.
- [7] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*[M]. London, UK: Springer-Verlag, 2005.
- [8] Fang Y G, Loparo K A. Stochastic stability of jump linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1204 – 1208.
- [9] Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking. Part V: multiple-model methods [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41(4): 1255 – 1321.
- [10] Magill D. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, 10(4): 434 – 439.
- [11] Chang C B, Athans M. State estimation for discrete systems with switching parameters [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1978, 14(3): 418 – 425.
- [12] Blom H A P, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(8): 780 – 783.
- [13] Doucet A, Gordon N J, Krishnamurthy V. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(3): 613 – 624.
- [14] Blom H A P, Bloem E A. Exact Bayesian and particle filtering of stochastic hybrid systems [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(1): 55 – 70.
- [15] 梁彦, 程咏梅, 贾宇岗, 等. 交互式多模型算法性能分析[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(4): 487 – 492.
Liang Y, Cheng Y M, Jia Y G, et al. Analysis on the performance and properties of interacting multiple models algorithm [J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(4): 487 – 492. (in Chinese)
- [16] Li W L, Jia Y M. An information theoretic approach to interacting multiple model estimation [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(3): 1811 – 1825.
- [17] 王树亮, 毕大平, 阮怀林, 等. 基于信息熵准则的认知雷达机动目标跟踪算法[J]. *电子学报*, 2019, 47(6): 1277 – 1284.
Wang S L, Bi D P, Ruan H L, et al. Cognitive radar maneuvering target tracking algorithm based on information entropy criterion [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(6): 1277 – 1284. (in Chinese)
- [18] Johnston L A, Krishnamurthy V. An improvement to the interacting multiple model (IMM) algorithm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(12): 2909 – 2923.
- [19] 许登荣, 程水英, 包守亮. 自适应转移概率交互式多模型跟踪算法[J]. *电子学报*, 2017, 45(9): 2113 – 2120.
Xu D R, Cheng S Y, Bao S L. Interacting multiple model algorithm based on adaptive transition probability [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(9): 2113 – 2120. (in Chinese)
- [20] 臧荣春, 崔平远. 马尔可夫参数自适应 IFIMM 算法研究[J]. *电子学报*, 2006, 34(3): 521 – 524.
Zang R C, Cui P Y. Research on adaptive Markov parameter IFIMM algorithm [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(3): 521 – 524. (in Chinese)
- [21] Lan J, Li X R, Mu C D. Best model augmentation for variable-structure multiple-model estimation [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(3): 2008 – 2025.
- [22] Principe J C. *Information Theoretic Learning: Renyi's Entropy and Kernel Perspectives*[M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2010.
- [23] Liu W, Pokharel P P, Principe J C. Correntropy: properties and applications in non-Gaussian signal processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5286 – 5298.
- [24] Wang F, He Y C, Wang S Y, et al. Maximum total correntropy adaptive filtering against heavy-tailed noises [J]. *Signal Processing*, 2017, 141: 84 – 95.
- [25] Ma W T, Qu H, Gui G, et al. Maximum correntropy criterion based sparse adaptive filtering algorithms for robust channel estimation under non-Gaussian environments [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352: 2708 – 2727.
- [26] Peng S Y, Chen B D, Sun L, et al. Constrained maximum correntropy adaptive filtering [J]. *Signal Processing*, 2017, 140: 116 – 126.
- [27] Chen B D, Liu X, Zhao H Q, et al. Maximum correntropy Kalman filter [J]. *Automatica*, 2017, 76: 70 – 77.
- [28] Liu X, Chen B D, Xu B, et al. Maximum correntropy unscented filter [J]. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(8): 1607 – 1615.

- [29] Liu X, Qu H, Zhao J H, et al. Extended Kalman filter under maximum correntropy criterion [A]. Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks [C]. Vancouver, Canada: IEEE, 2016.1733 – 1737.
- [30] Wang G Q, Li N, Zhang Y G. Maximum correntropy unscented Kalman and information filters for non-Gaussian measurement noise [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354: 8659 – 8677.
- [31] Liu X, Qu H, Zhao J H, et al. Maximum correntropy square-root cubature Kalman filter with application to SINS/GPS integrated systems [J]. ISA Transactions, 2019, 80: 195 – 202.
- [32] Liu D, Chen X Y, Xu Y, et al. Maximum correntropy generalized high-degree cubature Kalman filter with application to the attitude determination system of missile [J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 95: 105441.
- [33] Zhou W D, Liu M M. Robust interacting multiple model algorithms based on multi-sensor fusion criteria [J]. International Journal of Systems Science, 2015, 47 (1) : 92 – 106.
- [34] Li D, Sun J. Robust interacting multiple model filter based on Student's t-distribution for heavy-tailed measurement noises [J]. Sensors, 2019, 19(22): 4830.
- [35] Chen B D, Wang X, Lu N, et al. Mixture correntropy for robust learning [J]. Pattern Recognition, 2018, 79: 318 – 327.
- [36] Battistelli G, Chisci L. Kullback-Leibler average, consensus on probability densities, and distributed state estimation with guaranteed stability [J]. Automatica, 2014, 50: 707 – 718.
- [37] 戴定成, 姚敏立, 蔡宗平, 等. 改进的马尔可夫参数自适应 IMM 算法 [J]. 电子学报, 2017, 45(5): 1198 – 1205.
Dai D C, Yao M L, Cai Z P, et al. Improved adaptive Markov IMM algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(5): 1198 – 1205. (in Chinese)
- [38] Seah C E, Hwang I. Algorithm for performance analysis of the IMM algorithm [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47 (2) : 1114 – 1124.

作者简介



沈 忱(通信作者) 男,1988年1月出生于浙江宁波,现为浙江工商大学专任教师,主要研究方向为信息与信号处理、传感器网络技术等。

E-mail:write2shen@sina.com



Lyudmila Mihaylova 女,现为英国谢菲尔德大学信号处理与控制方向教授,主要研究方向为信息融合、序贯蒙特卡罗方法、智能自主系统、机器学习等。

E-mail:l.s.mihaylova@sheffield.ac.uk